斐波那契数列之美

李根

2020 年 4 月 8 日

目录

1　引言

数学之美，是一个很广泛的话题。而斐波那契数列之美，是数学之美的一个具体的体现。斐波那契数列在数学中是一个十分美妙的数列，它有诸多有趣的性质，更有围绕它开展的诸多应用。到目前为止，斐波那契在数学、物理、化学、生物学、金融和计算机科学等领域都有了广泛的应用。

斐波那契数列对我的触动，是在高中数学课本必修五[1]上。课本上的数列章节拓展性地介绍了斐波那契数列的由来与后续的发展。我认为，在高中阶段的学习中，对数列的掌握是一门必修的课程，而对斐波那契数列的研究有助于加深对数列的理解与掌握，同时能够增长见识，活跃思维。于是，我决定对斐波那契数列做一次深入浅出的研究，探寻斐波那契数列那内在的美。

本文主要通过对斐波那契数列一些性质和定理进行探究及证明，来发掘其美妙之处，同时结合斐波那契数列的应用，借助计算机来直观地呈现斐波那契数列的形态之美。

2　斐波那契数列的定义之美

2.1　课本中的例子

我们利用高中数学课本必修五中的例子来更好地理解斐波那契数列的定义。

在理想状态下，兔子不会死亡，资源充足。每 1 对初生兔子（一雄一雌）在 1 个月后会成长为成熟兔子，并且在成长为成熟兔子之后的每一个月都能够生出 1 对兔子。即每对初生兔子在出生后第 3 个及以后的每个月中都能生出 1 对兔子。在第 1 个月时，草原上有 1 对初生兔子，以此为条件，研究草原上在第 n 个月时的兔子总数。

在第 1 个月时，只有 1 对初生兔子，过了 1 个月，那对兔子成熟了，在第 3 个月时便生下 1 对兔子，这时草原上一共有 2 对兔子。再过 1 个月（第 4 个月），成熟的兔子再生 1 对兔子，而另 1 对初生兔子长大，这时草原上一共有 3 对兔子。如此推算下去，我们可以得到表1：[2]

表 1: 草原上兔子的数量

时间（月）	初生兔子（对）	成熟兔子（对）	兔子总数（对）
1	1	0	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8
7	5	8	13
8	8	13	21
9	13	21	34
10	21	34	55

[1]普通高中课程标准实验教科书　*数学5　必修（A版）*. 人民教育出版社 课程教材研究所 中学数学课程教材研究开发中心 编著, 2007 年 1 月第 3 版.

由此可知，从第 1 个月开始，以后每个月的兔子总对数是

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \cdots.$$

2.2 背景及定义

根据高德纳（Donald Ervin Knuth, 1938年1月10日-）的《计算机程序设计艺术》（The Art of Computer Programming），1150年印度数学家Gopala和金月在研究箱子包装对象长宽刚好为1和2的可行方法数目时，首先描述这个数列。在西方，最先研究这个数列的人是比萨的列奥那多 · 斐波那契（意大利人，Leonardo Fibonacci, 1175-1250），他描述兔子生长的数目时用上了这数列：1，1，2，3，5，8,$\cdots$，这个数列前两项都是1，从第三项开始，每一项都等于前两项之和。这个数列就称为斐波那契数列。[1]

上述例子中每月兔子的总对数即为斐波那契数列。我们可以由兔子增长的关系得知，这个数列的前两项均为 1 ，从第 3 项开始，每一项都等于前两项之和。

计斐波那契数列第 n 项为 $F(n)$ ，且 $n \in \mathbb{N}^+$ 。由递推关系，

$$F(n) = \begin{cases} 1, & n \leq 2 \\ F(n-2)+F(n-1), & n \geq 3. \end{cases} \tag{1}$$

由此可以发现，斐波那契数列是人们通过对大自然规律的观察与思考，最终在数学上总结出的式子。将大自然的复杂多变，总结为简明扼要的递推式，让人们更加方便地、直观的了解大自然，岂不美哉？

3 斐波那契数列的通项公式之美

写数列的习题时，经常会遇到求数列的通项公式的题。那么，斐波那契数列是否也有通项公式呢？答案是肯定的。数学家们用了各种方法来推导和证明斐波那契数列的通项公式。较为初等的方法就是利用待定系数法来证明它，或是数学归纳法，还可以用k阶齐次线性递推数列的性质、微分方程、特征根方程、矩阵的性质等来求解。由于篇幅有限，本文在这里不作探讨，仅给出其最终的通项公式。

斐波那契数列第n项的通项公式为

$$F(n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}},\ n \in \mathbb{N}^+. \tag{2}$$

观察上式，一个由正整数组成的数列，他的通项公式竟然包含无理数和指数？如果说化学中的阿伏伽德罗常数是连接宏观和微观的桥梁，那么数学中的斐波那契数列的通项公式就是连接有理数和无理数的桥梁。能把有理数和无理数连接起来，这也是斐波那契数列的美妙之处。

4 斐波那契数列的性质之美

在引言中我们知道，斐波那契数列有许多性质。那么，这条短短的递推式，仅仅是把前面两项加起来的数列，能有多少美妙的性质呢？让我们一起探究探究。

如无特别说明，以下内容$n \in \mathbb{N}^+$。

定理 4.1

$$F(n) = -F(n+1) + F(n+2). \tag{3}$$

证明　由斐波那契数列定义(1)式，

$$\begin{aligned} & -F(n+1) + F(n+2) && (4) \\ = & -F(n+1) + F(n+1) + F(n) && (5) \\ = & F(n). && (6) \end{aligned}$$

□

定理4.1 是一个很简单的性质，但更重要的是它对其他性质的应用。接下来的定理4.2 是对斐波那契数列的前n项的值求和，利用定理4.1 可以方便地用裂项相消法求得结果。

定理 4.2 斐波那契数列前n项和

$$\sum_{i=1}^{n} F(i) = F(n+2) - 1. \tag{7}$$

证明　由定理4.1 ，

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} F(i) && (8) \\ = & F(1) + F(2) + F(3) + \cdots + F(n) && (9) \\ = & -F(2) + F(3) - F(3) + F(4) - F(4) + F(5) - \cdots - F(n-1) + F(n+2) && (10) \\ = & -F(2) + F(n+2) && (11) \\ = & F(n+2) - 1. && (12) \end{aligned}$$

□

一个数列的前n项和竟然可以变成第$n+2$项减去1的值？斐波那契数列的奇妙正在此处体现出来。接下来我们要利用求前n项和的结果来对其分别进行奇数项和偶数项求和。

定理 4.3 斐波那契数列奇数项求和

$$\sum_{i=1}^{n} F(2i-1) = F(2n). \tag{13}$$

证明　由斐波那契数列定义(1)式和定理4.2 ，

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{n} F(2i-1) && (14) \\ = & F(1) + F(3) + F(5) + \cdots + F(2n-1) && (15) \\ = & F(1) + F(1) + F(2) + F(3) + F(4) + \cdots + F(2n-3) + F(2n-2) && (16) \\ = & 1 + \sum_{i=1}^{2n-2} F(i) && (17) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=1+F(2n)-1 &(18)\\
&=F(2n). &(19)
\end{aligned}
$$

□

定理 4.4 斐波那契数列偶数项求和

$$\sum_{i=1}^{n} F(2i)=F(2n+1)-1. \tag{20}$$

证明　由斐波那契数列定义(1)式和定理4.2，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} F(2i) &(21)\\
&=F(2)+F(4)+F(6)+\cdots+F(2n) &(22)\\
&=F(2)+F(2)+F(3)+F(4)+F(5)+\cdots+F(2n-2)+F(2n-1) &(23)\\
&=F(1)+F(2)+F(3)+F(4)+F(5)+\cdots+F(2n-2)+F(2n-1) &(24)\\
&=\sum_{i=1}^{2n-1} F(i) &(25)\\
&=F(2n+1)-1. &(26)
\end{aligned}
$$

□

不仅如此，对斐波那契数列每项取平方的值也是可以求和的。

定理 4.5 斐波那契数列平方求和

$$\sum_{i=1}^{n} F^2(i)=F(n)\cdot F(n+1). \tag{27}$$

证明　当$n=1$时，$F^2(1)=1$，$F(1)\cdot F(2)=1$，定理4.5 成立。

假设当$n=k(k\geq 1,\ k\in\mathbb{N}^+)$时，定理4.5 成立，即

$$\sum_{i=1}^{k} F^2(i)=F(k)\cdot F(k+1), \tag{28}$$

则当$n=k+1$时，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k+1} F^2(i) &(29)\\
&=\sum_{i=1}^{k} F^2(i)+F^2(k+1) &(30)\\
&=F(k)\cdot F(k+1)+F^2(k+1) &(31)\\
&=F(k+1)\cdot[F(k)+F(k+1)] &(32)\\
&=F(k+1)\cdot F(k+2). &(33)
\end{aligned}
$$

故当$n=k+1$时，定理4.5 成立。

综上，由数学归纳法原理可知，定理4.5 成立。 □

如果每一项都乘以一个n呢？即对数列$\{n \cdot F(n)\}$求和是否也有规律呢？

定理 4.6

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot F(i) = n \cdot F(n+2) - F(n+3) + 2. \tag{34}$$

证明　当$n=1$时，$1 \times F(1) = 1$，$1 \times F(3) - F(4) + 2 = 2 - 3 + 2 = 1$，定理4.6 成立。

假设当$n = k(k \geq 1,\ k \in \mathbb{N}^+)$时，定理4.6 成立，即

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot F(i) = k \cdot F(k+2) - F(k+3) + 2. \tag{35}$$

则当$n = k+1$时，

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k+1} i \cdot F(i) && (36)\\
=&\sum_{i=1}^{k} i \cdot F(i) + (k+1) \cdot F(k+1) && (37)\\
=&k \cdot F(k+2) - F(k+3) + 2 + k \cdot F(k+1) + F(k+1) && (38)\\
=&(k+1) \cdot F(k+3) - 2F(k+3) + F(k+3) - F(k+2) + 2 && (39)\\
=&(k+1) \cdot F(k+3) - [F(k+3) + F(k+2)] + 2 && (40)\\
=&(k+1) \cdot F(k+3) - F(k+4) + 2. && (41)
\end{aligned}$$

故当$n = k+1$时，定理4.6 成立。

综上，由数学归纳法原理可知，定理4.6 成立。 □

至此，我们已经对斐波那契数列各种求和的规律探究告一段落，接下来我们来探究一个非常重要且有广泛应用的性质。

定理 4.7 [3]

$$F(n+m) = F(n+1)F(m) + F(n)F(m-1),\ \ n,m \geq 2,\ \ n,m \in \mathbb{N}^+. \tag{42}$$

证明

$$\begin{aligned}
F(n+m) =&F(n+m-2) + F(n+m-1) && (43)\\
=&F(1)F(n+m-2) + F(2)F(n+m-1) && (44)\\
=&F(1)F(n+m-2) + F(2)[F(n+m-2) + F(n+m-3)] && (45)\\
=&F(2)F(n+m-3) + F(3)F(n+m-2) && (46)\\
=&F(2)F(n+m-3) + F(3)[F(n+m-3) + F(n+m-4)] && (47)\\
=&F(3)F(n+m-4) + F(4)F(n+m-3) && (48)\\
=&\cdots && (49)\\
=&F(n)F[n+m-(n+1)] + F(n+1)F[n+m-n] && (50)
\end{aligned}$$

$$=F(n)F(m-1)+F(n+1)F(m),\ n,m\geq 2,\ n,m\in\mathbb{N}^{+}. \tag{51}$$

□

这个性质能把两个数的和的项反映到数列上，对它的证明同样十分巧妙。接下来，我们来看看它的3个应用。

定理 4.8

$$F^2(n)+F^2(n+1)=F(2n+1). \tag{52}$$

证明　由定理*4.7*，

$$F(2n+1)=F[n+(n+1)] \tag{53}$$
$$=F^2(n)+F^2(n+1). \tag{54}$$

□

定理 4.9 斐波那契数列两倍项之商

$$\frac{F(2n)}{F(n)}=F(n-1)+F(n+1). \tag{55}$$

证明　由定理*4.7*，

$$\frac{F(2n)}{F(n)}=\frac{F(n+n)}{F(n)} \tag{56}$$
$$=\frac{F(n-1)F(n)+F(n)F(n+1)}{F(n)} \tag{57}$$
$$=F(n-1)+F(n+1). \tag{58}$$

□

定理 4.10 [3] 斐波那契数列中，若n为m的倍数，则$F(n)$为$F(m)$的倍数$(n,m\in\mathbb{N}^{+})$。即

$$F(m)|F(n),\ m|n,\ n,m\in\mathbb{N}^{+}. \tag{59}$$

证明　当$n=1\times m$时，$F(m)|F(1\times m)$成立，定理*4.10* 成立。

假设当$n=km(k\geq 1,\ k\in\mathbb{N}^{+})$时，定理*4.10* 成立，即

$$F(m)|F(km). \tag{60}$$

设

$$F(km)=t\cdot F(m),\ t\in\mathbb{N}^{+}, \tag{61}$$

则当$n=(k+1)m$时，由定理*4.7*，

$$F[(k+1)m]=F(m+km) \tag{62}$$

$$=F(m+1)F(km)+F(m)F(km-1) \tag{63}$$
$$=t\cdot F(m+1)F(m)+F(m)F(km-1) \tag{64}$$
$$=F(m)[t\cdot F(m+1)+F(km-1)]. \tag{65}$$

所以$F[(k+1)m]$是$F(m)$的倍数，即

$$F(m)|F[(k+1)m]. \tag{66}$$

故当$n=k+1$时，定理4.10 成立。

综上，由数学归纳法原理可知，定理4.10 成立。 □

上面三个性质分别把平方项、二倍项与多倍数项与原数列联系了起来，展现了斐波那契数列在数论上的美。

由以上的10个性质及对它们的证明，可以更加深切地感受到斐波那契数列在求和或者在各项之间内在的奇妙关系。

5 斐波那契数列与组合数的关系

组合数是指从$n(n\in\mathbb{N})$个不同元素中取出$m(0\le m\le n, m\in\mathbb{N})$个元素的总方案数，记为$\binom{n}{m}$。

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{67}$$

本文中，

$$0!=1. \tag{68}$$

而与组合数息息相关的就不得不提起杨辉三角。杨辉三角，又称帕斯卡三角（Pascal's Triangle）。在这个三角中的第$i(i\in\mathbb{N})$行中，每行第0和第i个数都为1，第$j(1\le j<i$，$j\in\mathbb{N})$个数是上一行（即第$i-1$行）第$j-1$和第j个数之和。如图1 [2]展现了一个杨辉三角。

杨辉三角的特别之处在于其第n行第m个数恰为$\binom{n}{m}$，其第n行在二项式定理中表示$(a+b)^n$展开后的系数。

而斐波那契数列又与杨辉三角有什么关系呢？如图2 [3]，当我们把杨辉三角中的每条对角线上的数字相加所得到的和列出来时，会发现恰好就是斐波那契数列！斐波那契数列竟然也能和组合数联系在一起！我们会不由感叹，斐波那契数列是多么美妙。

那么，这一奇妙的性质如何证明呢？

定理 5.1

$$F(n)=\sum_{i=0}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil-1}\binom{n-i-1}{i},\ n\in\mathbb{N}^{+}. \tag{69}$$

[2]图源http://www.texample.net/tikz/examples/pascals-triangle-and-sierpinski-triangle/

[3]图源https://hooyes.net/p/javascript-fabonacci

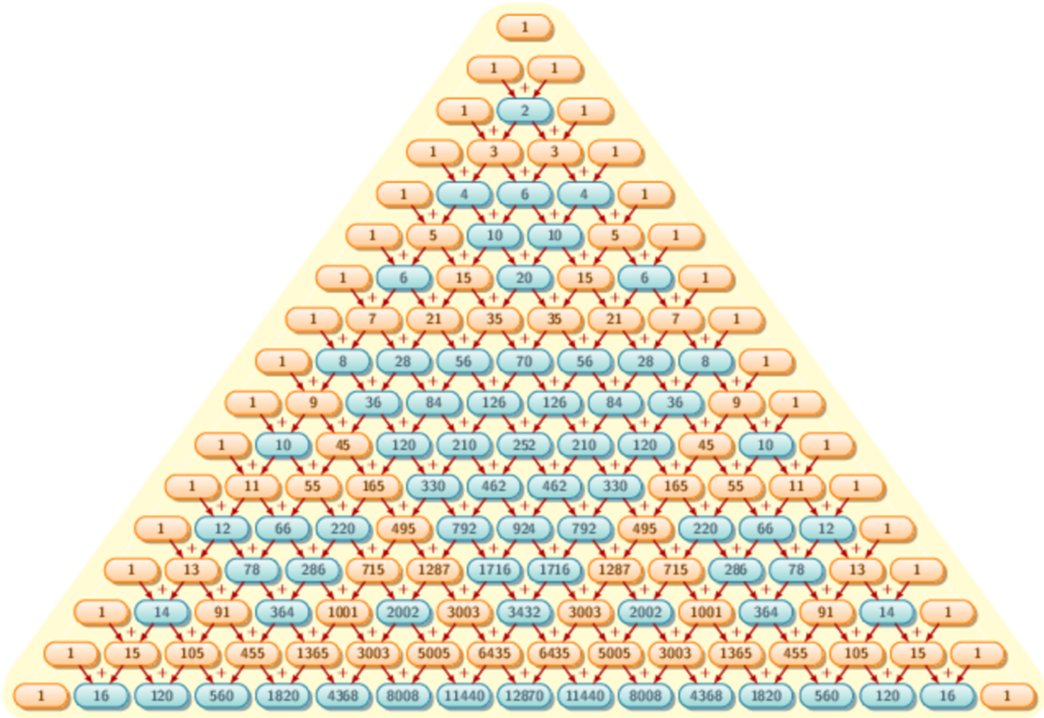

图 1: Pascal's Triangle

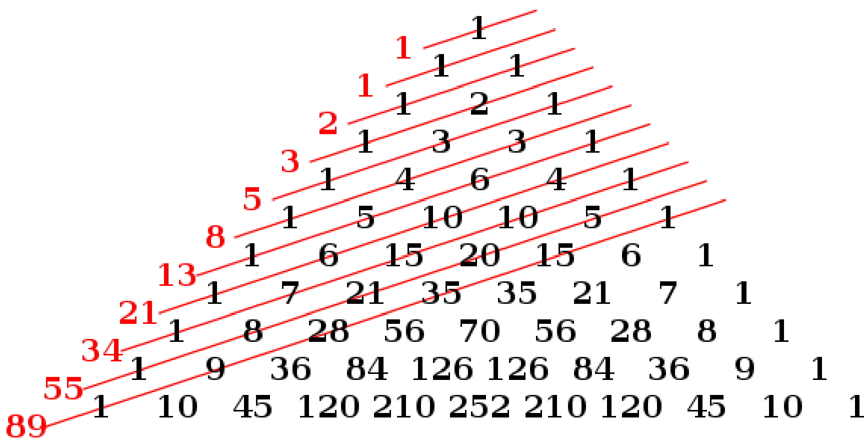

图 2: 斐波那契数列在杨辉三角中的体现

证明　首先，易得当n为任意奇数时，

$$\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1=\frac{n-1}{2},\tag{70}$$

当n为任意偶数时，

$$\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil-1=\frac{n-2}{2}.\tag{71}$$

当$n=1$时，

$$F(1)=\binom{0}{0}=1.\tag{72}$$

定理5.1 成立。

当$n=2$时，

$$F(2)=\binom{1}{0}=1.\tag{73}$$

定理5.1 成立。

假设当$n=k-1$和$n=k-2(k\geq 3,\ k\in\mathbb{N}^{+})$且$k$为奇数时，定理5.1 成立，即

$$F(k-1)=\sum_{i=0}^{\left\lceil\frac{k-1}{2}\right\rceil-1}\binom{k-i-2}{i},\tag{74}$$

$$F(k-2)=\sum_{i=0}^{\left\lceil\frac{k-2}{2}\right\rceil-1}\binom{k-i-3}{i},\tag{75}$$

则当$n=k$时，

$$\begin{aligned}
F(k)=&F(k-2)+F(k-1) &(76)\\
=&\sum_{i=0}^{\frac{(k-2)-1}{2}}\binom{(k-2)-i-1}{i}+\sum_{i=0}^{\frac{(k-1)-2}{2}}\binom{(k-1)-i-1}{i} &(77)\\
=&\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}}\binom{k-i-3}{i}+\sum_{i=0}^{\frac{k-3}{2}}\binom{k-i-2}{i} &(78)\\
=&\binom{k-\frac{k-3}{2}-3}{\frac{k-3}{2}}+\sum_{i=1}^{\frac{k-3}{2}}\left(\binom{k-(i-1)-3}{i-1}+\binom{k-i-2}{i}\right)+\binom{k-0-2}{0} &(79)\\
=&\binom{\frac{k-3}{2}}{\frac{k-3}{2}}+\sum_{i=1}^{\frac{k-3}{2}}\left(\binom{k-i-2}{i-1}+\binom{k-i-2}{i}\right)+\binom{k-2}{0} &(80)\\
=&\binom{\frac{k-1}{2}}{\frac{k-1}{2}}+\sum_{i=1}^{\frac{k-3}{2}}\binom{k-i-1}{i}+\binom{k-1}{0} &(81)\\
=&\sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}}\binom{k-i-1}{i} &(82)
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i=0}^{\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1} \binom{k-i-1}{i}. \tag{83}$$

故当$n = k$且k为奇数时，定理5.1 成立。

假设当$n = k - 1$和$n = k - 2(k \geq 3,\ k \in \mathbb{N}^{+})$且$k$为偶数时，定理5.1 成立，即

$$F(k-1) = \sum_{i=0}^{\lceil \frac{k-1}{2} \rceil - 1} \binom{k-i-2}{i}, \tag{84}$$

$$F(k-2) = \sum_{i=0}^{\lceil \frac{k-2}{2} \rceil - 1} \binom{k-i-3}{i}, \tag{85}$$

则当$n = k$时，

$$F(k) = F(k-2) + F(k-1) \tag{86}$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{(k-2)-2}{2}} \binom{(k-2)-i-1}{i} + \sum_{i=0}^{\frac{(k-1)-1}{2}} \binom{(k-1)-i-1}{i} \tag{87}$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{k-4}{2}} \binom{k-i-3}{i} + \sum_{i=0}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k-i-2}{i} \tag{88}$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \left[\binom{k-(i-1)-3}{i-1} + \binom{k-i-2}{i} \right] + \binom{k-0-2}{0} \tag{89}$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \left[\binom{k-i-2}{i-1} + \binom{k-i-2}{i} \right] + \binom{k-2}{0} \tag{90}$$

$$= \sum_{i=1}^{\frac{k-2}{2}} \binom{k-i-1}{i} + \binom{k-1}{0} \tag{91}$$

$$= \sum_{i=0}^{\frac{k-1}{2}} \binom{k-i-1}{i} \tag{92}$$

$$= \sum_{i=0}^{\lceil \frac{k}{2} \rceil - 1} \binom{k-i-1}{i}. \tag{93}$$

故当$n = k$且k为偶数时，定理5.1 成立。

综上，由数学归纳法原理可知，对于$\forall \in \mathbb{N}^{+}$，

$$F(n) = \sum_{i=0}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1} \binom{n-i-1}{i}. \tag{94}$$

□

6 斐波那契数列与黄金分割比的关系

6.1 黄金分割比

黄金分割比，就是把一条线段分为两个部分，使得这部分与全长之比等于另一部分与

这部分之比。由此设这部分的长为φ，全长为1，且$\varphi > 0$，则可以列出方程

$$\frac{\varphi}{1} = \frac{1-\varphi}{\varphi}, \tag{95}$$

解得

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}. \tag{96}$$

黄金分割比的倒数即为

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{97}$$

6.2 关系

要探究斐波那契数列与黄金分割比的关系，我采用了以下两种方法。

6.2.1 方法一

列出斐波那契的前几项，使其相邻项相除，即

$$\frac{F(2)}{F(1)} = \frac{1}{1}, \frac{F(3)}{F(2)} = \frac{2}{1}, \frac{F(4)}{F(3)} = \frac{3}{2}, \frac{F(5)}{F(4)} = \frac{5}{3}, \frac{F(6)}{F(5)} = \frac{8}{5}, \cdots, \tag{98}$$

不难看出

$$\frac{1}{1} = 1,\ \frac{2}{1} = 1+\frac{1}{1},\ \frac{3}{2} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}},\ \frac{5}{3} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}},\ \frac{8}{5} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1}}}}, \cdots, \tag{99}$$

则当n趋近于无穷大时，即

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)} = 1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\cdots}}}. \tag{100}$$

设$\lambda = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)}$，则

$$\lambda = 1+\frac{1}{\lambda}. \tag{101}$$

解得

$$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\varphi}. \tag{102}$$

即当n趋近于无穷大时，斐波那契数列相邻两项的商是黄金分割比的倒数。

6.2.2 方法二

由斐波那契数列通项公式(2)式，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)} \tag{103}$$

$$=\frac{\dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}}{\dfrac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}{\sqrt{5}}} \tag{104}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}}, \tag{105}$$

由于$\left|\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right|<1$，则

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}=0, \tag{106}$$

则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{F(n+1)}{F(n)} \tag{107}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} \tag{108}$$

$$=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{\varphi}. \tag{109}$$

即当n趋近于无穷大时，斐波那契数列相邻两项的商是黄金分割比的倒数。

6.3 斐波那契螺旋线

斐波那契螺旋线，又称黄金螺旋线。其绘制方法是每次以$F(i)$为半径画一个四分之一圆弧，常与黄金分割矩形相结合。斐波那契螺旋线是斐波那契数列在形态上真正能让我们直观地感受它的美。在这里，我用了计算机中编程语言 Python 中的 turtle 库进行绘制斐波那契螺旋线，以更好地体会斐波那契数列的形态美。其中的原理是让计算机模拟画笔，第n次画以边长为$F(n)$画正方形，再以半径为$F(n)$画四分之一圆弧。此处贴出代码供参考。

```python
from turtle import *

speed(20)
```

```
pensize(5)
penup()
goto(-250,-150)
pendown()
left(90)
f=[0,1,1]
n=11
for i in range(n):
    if i<3:
        continue
    f.append(f[i-1]+f[i-2])

for i in range(n):
    if i==0:
        continue
    r = 12*f[i]
    color("black")
    for j in range(3):
        forward(r)
        right(90)
    if i>1:
        penup()
    forward(r)
    right(90)
    pendown()
    color("red")
    circle(-r,90)

hideturtle()
```

绘制效果如图3 。

斐波那契螺旋线是斐波那契数列的一大应用，其在艺术设计上发挥着很大的作用，其以完美的黄金比例著称。著名的蒙娜丽莎的微笑（如图4 [4]）还有海洋动物鹦鹉螺（如图5 [5]）都是满足斐波那契螺旋线的完美比例的例子。

[4] 图源https://zhuanlan.zhihu.com/p/96168626

[5] 图源https://pixabay.com/zh/illustrations/fibonacci-geometry-mathematics-1079783/

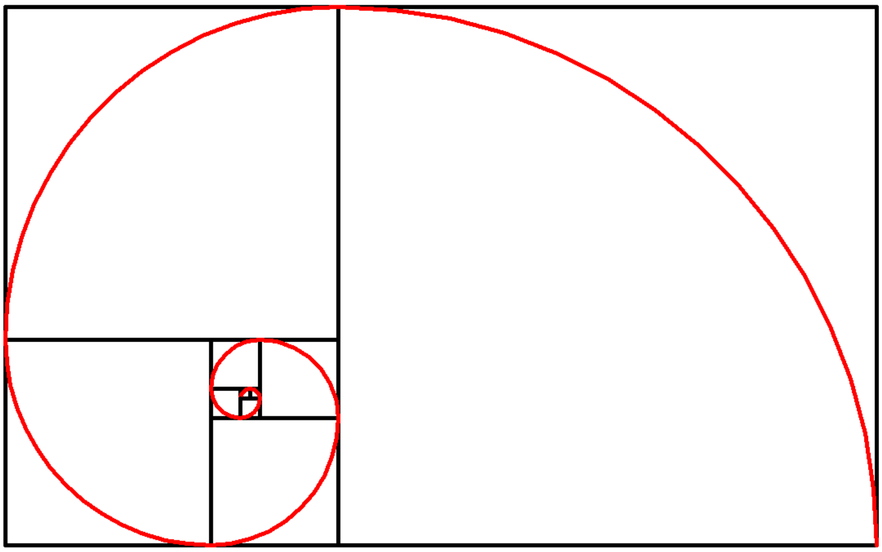

图 3: 斐波那契螺旋线

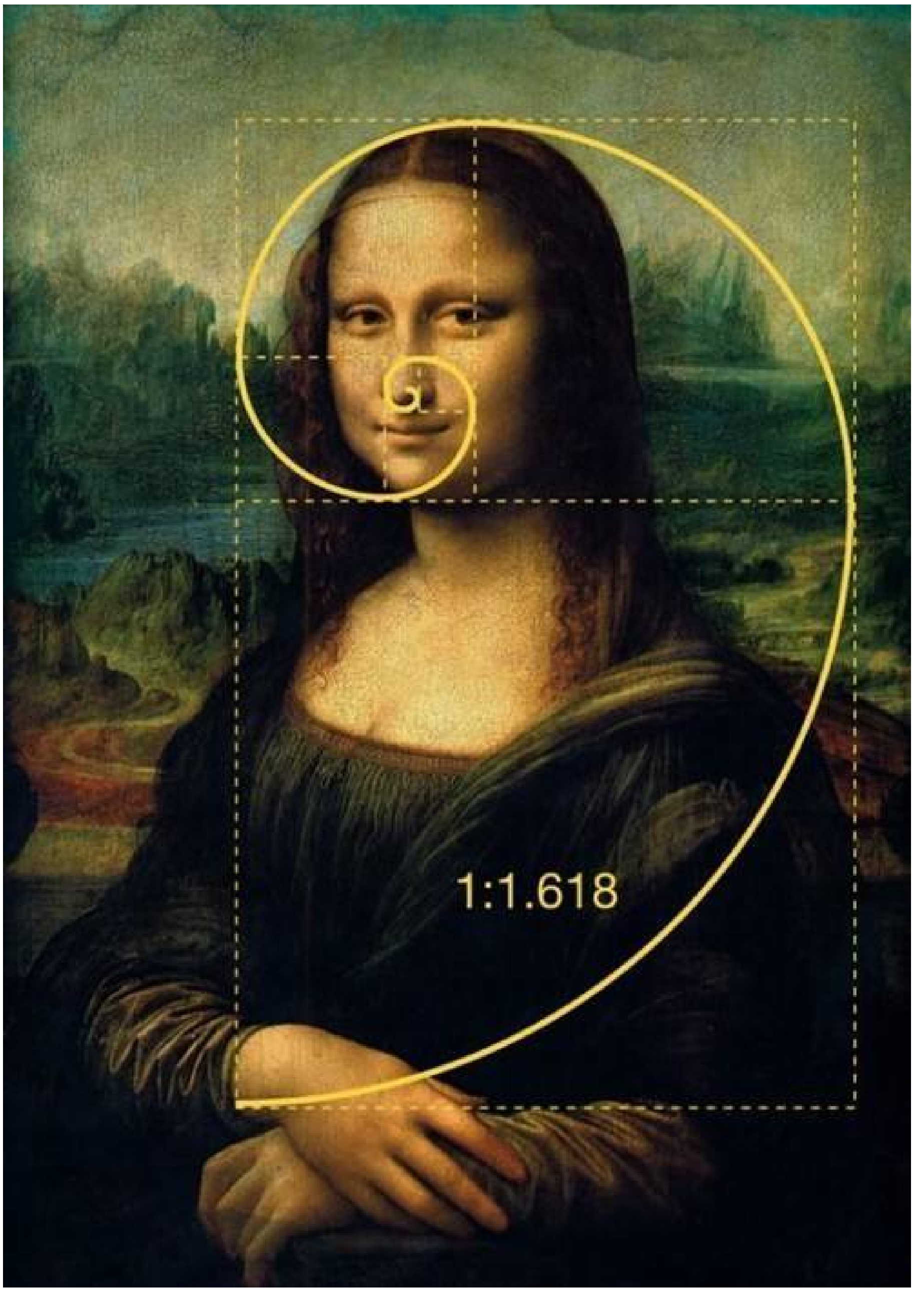

图 4: 蒙娜丽莎的微笑

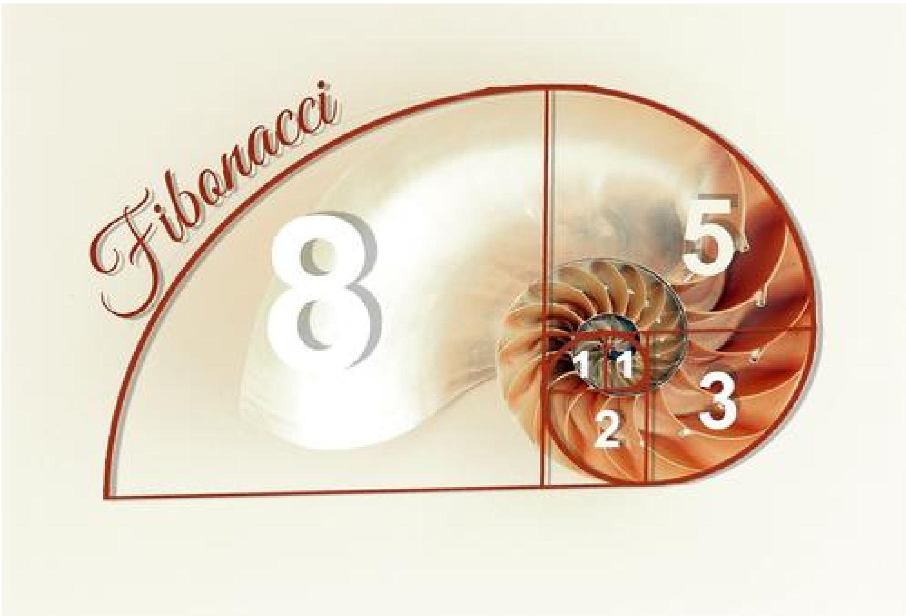

图 5: 海洋动物鹦鹉螺

7 后记

斐波那契数列的美还在生活、艺术、大自然等诸多方面体现着，限于篇幅，在本文中仅列举了一些斐波那契数列之美的例子。而斐波那契数列还有更多更加神奇、更加惊艳的美，需要我们有一颗善于发现的心，等待我们一起去发现。

鉴于笔者能力有限，文笔笨拙，文章中的内容和证明不免会有不严谨或错误的地方，敬请指正。对斐波那契数列更多性质与应用，我撰写了另一篇更为详尽的文章，如想要阅读可以联系我。

感谢您能阅读到这里，也感谢遇见数学第三次征文活动“数学蒲公英”为我提供展示的平台。

参考文献

[1] 维基百科编者. 斐波那契数列[G/OL]. 维基百科, 2020(20200130)[2020-01-30]. https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=%E6%96%90%E6%B3%A2%E9%82%A3%E5%A5%91%E6%95%B0%E5%88%97&oldid=57905284.

[2] 人民教育出版社,课程教材研究所,中学数学课程教材研究开发中心.普通高中课程标准实验教科书数学5 必修 (A版)[M].人民教育出版社:北京,2007:32-33.

[3] 李晨滔,馮勁敏.費氏數列的性質整理[EB/OL].https://www.shs.edu.tw/works/essay/2014/03/2014032310331517.pdf,2014.